ある種の双曲型Cauchy問題の解の特異性について(偏微分方程式の解の構造の研究)

若林, 誠一郎

数理解析研究所講究録
530巻 1984年 101-114

ある種の双曲型Cauchy問題の解の特異性について

筑波大数学系　若林誠一郎 (Seiichiro Wakabayashi)

1. 序　双曲型方程式の解の特異性を記述する手段として、Hamilton flow (null bicharacteristic flow) が重要な役割を果たしてきたが、特性根が滑らかでないとき、Hamilton flow をもはや定義することはできない。一般の双曲型方程式の解の特異性を記述するために、Hamilton flow を一般化・拡張する必要がある。ここでは、Hamilton flow の定義を拡張して、C^∞のカテゴリーである種の仮定の下に(包合的な場合を含む)、この一般化されたHamilton flow を用いて、解の波面集合が上から評価されることをしめす(定理1参)。また、Gevrey クラス(特性根の重複度に依存してきまる)において、係数が実解析的であると仮定して、Gevrey クラスでの解の特異性が一般化されたHamilton flowによって評価されることをしめす(定理2参。講演における予想が正しいことをしめす)。

2. <u>"flow"の定義および結果</u>　$P(x,\xi)$をC^∞係数をもつ$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$のm次多項式とし.

$$P(x,\xi)=\sum_{j=1}^{m}P_j(x,\xi),\quad P_j(x,\xi):j\text{次斉次多項式}$$

とかく。ここで、$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\xi \overset{dual}{\longleftrightarrow} x$である。次のCauchy問題を考えよう:

$$(\mathrm{CP})\qquad \begin{cases} P(x,D)\,u(x)=f(x) \\ \operatorname{supp} u\subset\{x_1\geqq 0\} \end{cases}$$

ここで、$f\in\mathcal{D}'$, $\operatorname{supp} f\subset\{x_1\geqq 0\}$である。また、$C^\infty$を法としたCauchy問題

$$(\mathrm{CP})'\qquad \begin{cases} P(x,D)\,u(x)\equiv f(x)\quad (\mathrm{mod}\ C^\infty) \\ \operatorname{sing\,supp} u\subset\{x_1\geqq 0\} \end{cases}$$

を考えよう。ここで、$f\in\mathcal{D}'$, $\operatorname{sing\,supp} f<\{x_1\geqq 0\}$である。まず、

(A-1)　$P_m(x,\xi)$は各$x\in\mathbb{R}^n$に対して、$\vartheta=(1,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n$に関して、双曲型多項式である。すなわち、

$$P_m(x,\xi-i\tau\vartheta)\neq 0\quad \text{for } x\in\mathbb{R}^n,\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ \tau>0$$

を仮定する。

<u>"flow"の定義</u>　$z=(x,\xi)\in T^*\mathbb{R}^n$に対して、

$$P_m(z+s\delta z)=s^{\mu}\left(P_{mz}(\delta z)+o(1)\right)\quad \text{as } s\to 0$$

$$P_{mz}(\delta z)\neq 0\quad \text{in } \delta z\in T_z(T^*\mathbb{R}^n)$$

によって、zにおけるP_mのlocalization $P_{mz}(\delta z)$を定義する(

Atiyah-Bott-Gårding [1] の定義の一般化)。

<u>Lemma 1</u>　$P_{mz}(\delta z)$ は δz の μ 次斉次多項式で，$(0,\vartheta)\in\mathbb{R}^{2n}$ に関して双曲型多項式である。

証明は，Ivrii-Petkov [10]，Hörmander [6]，Bronshtein [2] より明らかであろう。故に，$z\in T^*\mathbb{R}^n$ に対して，

$$\Gamma_z \overset{def}{=} \Gamma(P_{mz},(0,\vartheta)) \subset T_z(T^*\mathbb{R}^n)$$

が定義できる。ここで，

$\Gamma(P_{mz},(0,\vartheta))=$ '$\{\delta z\,;\,P_{mz}(\delta z)\neq 0\}$ の $(0,\vartheta)$ を含む連結成分'

である。

$$\Gamma_z^\sigma \overset{def}{=} \{\delta z\in T_z(T^*\mathbb{R}^n)\,;\,\sigma(\delta z,\delta z')\geqq 0 \text{ for } {}^\forall\delta z'\in\Gamma_z\}$$

とおく。ここで，$\sigma(\delta z,\delta z')=\delta x\cdot\delta\xi'-\delta x'\cdot\delta\xi$，$\delta z=(\delta x,\delta\xi)$，$\delta z'=(\delta x',\delta\xi')$ である。

$$K_z^\pm \overset{def}{=} \{z(t)\in T^*\mathbb{R}^n\,;\,\{z(t)\} \text{ は Lipschitz 連続な曲線で，}$$
$$\frac{d}{dt}z(t)\in\Gamma_{z(t)}^\sigma\ (a.e.\ t),\ z(0)=z,\ \pm t\geqq 0\}$$

によって，"flow"を定義する。ここで，$A_z\overset{def}{=}\{\delta z\,;\,P_{mz}(\delta z)=0\}$ とおいて，$K_z^\pm$ の定義における $\Gamma_{z(t)}^\sigma$ を $\Gamma_{z(t)}^\sigma\cap A_{z(t)}$ でおきかえても同じものを定義する。

<u>$K_z^\pm$ の性質</u>　(i)　$P_m(z)\neq 0$ ならば，$K_z^\pm=\{z\}$ である(∵ $P_{mz}(\delta z)\equiv P_m(z)$ より $\Gamma_z^\sigma=\{0\}$)。

(ii)　$z\in T^*\mathbb{R}^n\setminus 0$ ならば，$K_z^\pm\subset T^*\mathbb{R}^n\setminus 0$ であり，$z=(x,0)$ ならば，$K_{(x,0)}^\pm=K_x^\pm\times\{0\}$ とかける(∵ $P_{m(x,0)}(\delta x,\delta\xi)=P_m(x,\delta\xi)$

より. $\Gamma^{\sigma}_{(x,0)} = \Gamma(P_m(x,\cdot),\vartheta)^{*}\times\{0\}$ となる。ここで、

$$\Gamma^{*} = \{\delta x\,;\ \delta x\cdot\delta\xi \geqq 0 \ \text{for}\ {}^{\forall}\delta\xi\in\Gamma\}$$

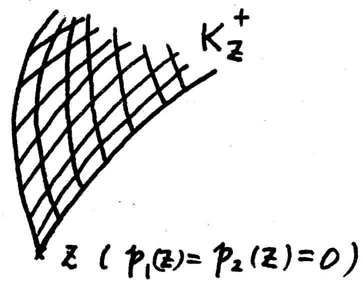
である)。$K^{\pm}_{x}$ は解の台(support)を記述するものと考えられる(狭義双曲型作用素に対しては、Duistermaat [4]参)。

(iii) P_mが狭義双曲型のとき.

$K^{\pm}_{z}$ = 'zから$\pm x_1$が増加する方向にでるP_mの零特性帯' if $z\in T^{*}R^{n}\setminus 0$, $P_m(z)=0$

(iv) P_mが重複度一定のとき. P_mに対する$K^{\pm}_{z}$はP_mよりつくられる狭義双曲型多項式に対する$K^{\pm}_{z}$と一致する。

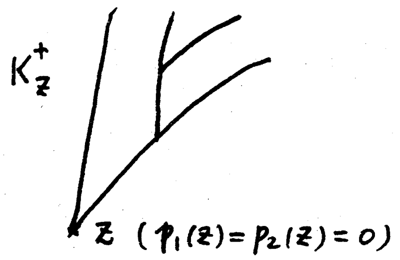
(v) $P_2(z)=p_1(z)p_2(z)$, $\{p_1,p_2\}=ap_1+bp_2$ (p_1, p_2はξについて1次正斉次)のとき. 包合的すなわち、$H_{p_1}, H_{p_2}, (\sum\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j})$ が一次独立であると仮定すれば左図のようになる。zから出るp_1の零特性帯上 $p_2=0$ より、p_1の零特性帯上の各点からp_2の零特性帯がでて、それらの



broken bichar. の全体がK^{+}_{z}である(2次元曲面に含まれる)。

一次独立性を仮定しないときは、上のようなものの射影であって、p_1, p_2の零特性帯が一点になる場合も許せば、上のように記述される。

(vi) $P_2(z)=p_1(z)p_2(z)$, $\{p_1,p_2\}\neq 0$ のとき、zが$p_1(z)=p_2(z)=0$をみたすならば、zからでるp_1の零特性帯とp_2の零特性帯の



和集合が z の近傍で K_z^+ と一致する。p_1 の零特性帯上 $p_2(z)$ が零になる点があれば、そこからでる p_2 の零特性帯も K_z^+ に含まれる。すなわち、K_z^+ は z からでる broken null bichar. の x_1 が増加する方向のもの全体である。

(vii) $P_m(x,\xi)\equiv P_m(\xi)$ (定係数)のとき、

$$K^{\pm}_{(x,\xi)} = (\{x\}\pm\Gamma(P_{m\xi},\vartheta)^*)\times\{\xi\}$$

である。

C^∞のカテゴリーで解の特異性を考えるときには、次の仮定をおく:

(A-2) 任意の$(x^0,\xi^0)\in T^*\mathbb{R}^n\setminus 0$に対して、斉次正準変換 $\chi:\tilde{\Gamma}\to\Gamma$ ($\tilde{\Gamma}$: $(0,\eta^0)\in T^*\mathbb{R}^n\setminus 0$の錐近傍, Γ: $(x^0,\xi^0)\in T^*\mathbb{R}^n\setminus 0$の錐近傍)が存在して、

$$P_m\circ\chi(y,\eta)=e(y,\eta)\,p(\eta),\qquad (y,\eta)\in\tilde{\Gamma}$$
$$e(y,\eta)\neq 0 \quad \text{in } \tilde{\Gamma}$$

となる。ここで、$p(\eta)$は(斉次)多項式である。

仮定(A-2)より、χ,χ^{-1}にそれぞれ対応するFourier積分作用素F_1,F_2が存在して(F_1,F_2はそれぞれ$(0,\eta^0)$,(x^0,ξ^0)でelliptic)、

'F_2PF_1のシンボル' $= p(\eta)-g(y,\eta)$

in a conic nbd of $(0,\eta^0)$ (以下 "at $(0,\eta^0)$" とかく)

ここで、$p(\eta)$ が主シンボルになるように F_1, F_2 がとられている。

(A-3)(Levi条件) 各 $(x^0,\xi^0)\in T^*\mathbb{R}^n\setminus 0$ に対して、今定義された $p(\eta)$, $q(y,\eta)$ は、

$$|q(y,\eta)| \le C|p(\eta - i\tilde{\vartheta})| \quad \text{at } (0,\eta^0), \quad |\eta| \ge C_0$$

をみたす。ここで、$\tilde{\vartheta} = \frac{\partial\eta}{\partial\xi}(x^0,\xi^0)\vartheta$ ($\neq 0$ となる)、$\chi^{-1}(x,\xi) = (y(x,\xi), \eta(x,\xi))$ である。

(A-3)は

$$|q(y,\eta)| \le C\tilde{p}(\eta) \quad \text{at } (0,\eta^0)$$

に同値である(仮定(A-1)の下で)。ここで、$\tilde{p}(\eta) = \left(\sum_\alpha \left|\frac{\partial^{|\alpha|} p}{\partial\eta^\alpha}(\eta)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ である。

(A-4) 各 $z\in T^*\mathbb{R}^n\setminus 0$ に対して、$K_z^+ \cap \{x_1 \ge 0\}$ はコンパクトである。

<u>定理1</u> (A-1)−(A-4)の仮定の下で、u が$(CP)'$の解ならば、

$$WF(u) \subset \{z;\ z\in K^+_{z'} \ \text{for some } z'\in WF(f)\} \equiv \mathcal{C}\circ WF(f)$$

である。

<u>注意</u> (A-2)は非常にきつい仮定であるが、包合的である場合および主部が定係数である場合にはみたされる。一般には(A-3)は χ の選び方に依存する条件だが、Levi条件の自然な拡張にはなっている(定理3, 4参)。

$*$によって(κ)または$\{\kappa\}$を表わすことにする$(1<\kappa<\infty)$。$\mathcal{D}^*$によってコンパクトな台をもつGevrey族を、$\mathcal{D}^{*\prime}$によってultradistributionの空間を表わすことにする(Komatsu[11]参)。$WF_*(f)$によって超局所的にfが$\mathcal{D}^*$ (or $\mathcal{E}^*$)に属さない$T^*\mathbb{R}^n\setminus 0$の閉部分集合を表わすことにする(例えば、Wakabayashi [18]参)

<u>定理2</u> $P(x,\xi)$の係数が実解析的でかつ、仮定(A-1)および 仮定

(A-4)′ 各$x\in\mathbb{R}^n$に対して、$K_x^-\cap\{x_1\geqq 0\}$がコンパクトである.

がみたされているとする。$P_m(x,\xi_1,\xi')=0$のξ_1についての根の重複度が高々$r(\geqq 2)$であるとする。そのとき、$1<\kappa<\frac{r}{r-1}$に対して、$f\in\mathcal{D}^{*\prime}$ならば(CP)の解$u$に対して、

$$WF_*(u)\subset \mathcal{C}\circ WF_*(f)$$

が成立する。

<u>注意</u> Gevreyクラスでの適切性は、Ivrii [8], Bronshtein [3], Trepreau [17]によってしめされている。定理2においては、$P_m(x,\xi)$の係数が実解析的であることを仮定すればよく、低階の係数について実解析的であると仮定する必要はない。また、特性根が滑らかならば、$P_m(x,\xi)$の係数も実解析的である必要はない。

<u>系</u> 定理2の仮定の下で.

$$\mathrm{supp}\, u \subset \{x \in \mathbb{R}^n ;\ x \in K_y^+ \ \text{for some } y \in \mathrm{supp} f\}$$

である。

<u>注意</u> $P(x, \xi)$の係数が実解析的である必要はないが、そのときは、定理2の証明と同じようにして証明する必要がある。

3. <u>定理1に対する注意および例</u> 狭義双曲型作用素(real principal type)に対しては、Hörmander [7]によって定理1がしめされた。重複度一定の場合にはChazarain、包合的な場合は(例1参)、森本, Lascar, Nosmas (特にNosmas)によってしめされた([20], [14], [12], [16])。non-involutiveに対しては、Ivrii, Hange, Melroseによって定理1は証明された([9],[5],[13])。その他多くの研究があり、結果としては定理1をそれぞれの場合に証明したことになっているように思われる。

定理1の仮定(A-3)は、簡単な場合には、斉次正準変換χの選び方に依存しないことがわかる。

<u>定理3.</u> P_mの特性根の重複度が高々2であるとする。そのとき

$$(A\text{-}3) \text{ at } (x^0, \xi^0) \iff \left| \frac{P'_{m-1}(x, \xi)}{P_m(x, \xi - i\vartheta)} \right| \le C \quad \text{at } (x^0, \xi^0)$$

ここで、

$$P'_{m-1}(x,\xi)=P_{m-1}(x,\xi)+\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial\xi_j}P_m(x,\xi) \quad \text{(subprincipal symbol)}$$

である。

<u>定理4</u>　$(x^0,\xi^0)\in T^*\mathbb{R}^n\setminus 0$ とし、

$$P_m(x,\xi)=e(x,\xi)\prod_{j=1}^{s}(\xi_1-\lambda_j(x,\xi'))^{\nu_j} \quad \text{at } (x^0,\xi^0)$$

なる形であるとする。ここで、$\lambda_j(x,\xi')\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}))$, $e(x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}))$ かつ、$e(x^0,\xi^0)\neq 0$ である。さらに、$p_j=\xi_1-\lambda_j(x,\xi')$ とおいて、$\{p_j,p_k\}=0$ $(j,k=1,\cdots,s)$ かつ $H_{p_1},\cdots,H_{p_s}$, $\sum\xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_k}$ が1次独立であると仮定する(すなわち、包合的であると仮定する)。そのとき、

(A-3) at (x^0,ξ^0)

$\Longleftrightarrow$

$$P(x,D)=e(x,D)p_1(x,D)^{\nu_1}\cdots p_s(x,D)^{\nu_s}$$
$$+\sum_{\mu<\nu}a_\mu(x,D)p_1(x,D)^{\mu_1}\cdots p_s(x,D)^{\mu_s} \quad \text{at } (x^0,\xi^0)$$

である。ここで、$a_\mu(x,D)\in L^{m-r}$ かつ、$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_s)$, $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_s)$, $\nu_1+\cdots+\nu_s=r$ である。

<u>定理5</u>　$w=(w_1,\cdots,w_\ell)$ として、$(n+\ell)$変数の偏微分作用素 $\tilde{P}(x,w,D_x,D_w)$ が存在して、

$$\tilde{P}(x,w,D_x,D_w)u(x)=P(x,D_x)u(x) \quad ({}^\forall u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$$

(i.e. $\tilde{P}(x,w,\xi,0)=P(x,\xi)$ for ${}^\forall x, {}^\forall w, {}^\forall\xi$) かつ、$\tilde{P}$ が (A-1)−(A-4) をみたすならば、定理1が成立する。

<u>例1</u> (Nosmas [16])

$$P(x,D) = p_1(x,D)^{\nu_1} \cdots p_s(x,D)^{\nu_s}$$
$$\qquad + \sum_{\mu<\nu} a_\mu(x,D)\, p_1(x,D)^{\mu_1} \cdots p_s(x,D)^{\mu_s}, \quad a_\mu(x,D) \in L^0$$

$$p_j(x,\xi) \sim \xi_1 - \lambda_j(x,\xi'), \quad \lambda_j(x,\xi') \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}))$$

$\lambda_j(x,\xi')$ は ξ' について 1 次斉次

$$\{p_j, p_k\} = a_{jk}\, p_j + b_{jk}\, p_k$$

a_{jk}, b_{jk} は $\xi' \neq 0$ に対して滑らか

ならば、定理1が成立する。実際 $\tilde{P}$ を適当につくって定理5が適用できる。

<u>例2</u>　$n = 3$.

$$P(x,\xi) = \xi_1^3 + 3\xi_1^2\xi_3 - 3x_2^2(\xi_2^2+\xi_3^2)(\xi_1+\xi_3) + a(x)\xi_1^2$$
$$\qquad + x_2^2(b(x)\xi_2^2 + c(x)\xi_3^2) + d(x)\xi_1\xi_3 + x_2(e(x)\xi_1\xi_2 + f(x)\xi_2\xi_3)$$

に対して定理5が適用できる。$\xi_1^0 = x_2^0 = \xi_3^0 = 0$ なる (x^0, ξ^0) に対して、特性根は3重根になる(滑らかでない)。そのとき、

$$\bigcup_{\lambda>0} K^+_{(x^0,\lambda\xi^0)} = \{(x,\xi);\ 0 \leq x_3 - x_3^0 \leq 3(x_1 - x_1^0),$$
$$\qquad x_2 = 0,\ \xi_1 = 0,\ \xi_2 = \lambda\xi_2^0,\ \xi_3 = 0 \text{ and } \lambda > 0\}$$

である(conical refraction)。

定理1の証明については、Wakabayashi [19] を参照されたい。

4. <u>定理2に対する注意</u>

<u>定理6</u> $P(x,\xi)$の係数が実解析的でかつ、(A-1), (A-4)′をみたすとする。(CP)がC^∞適切ならば、

$$WF(u) \subset \mathcal{C} \circ WF(f)$$

が成立する。

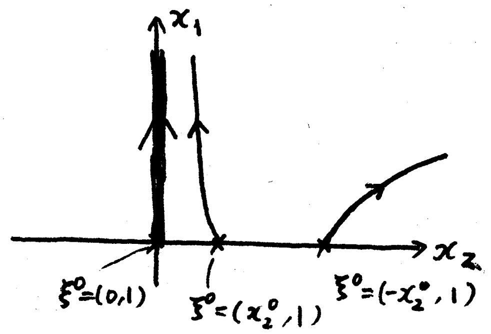
<u>注意</u> 特に、Nishitani [15] において2階2変数双曲型偏微分作用素(係数は実解析的)に対するCauchy問題がC^∞適切であるための必要十分条件が与えられているので、定理6より、実解析的係数をもつ2階2変数双曲型偏微分作用素に対するC^∞適切なCauchy問題の解の波面集合は、ほぼ完全に評価されたことになる。

<u>例</u> $m=2,\ n=2$ とする。

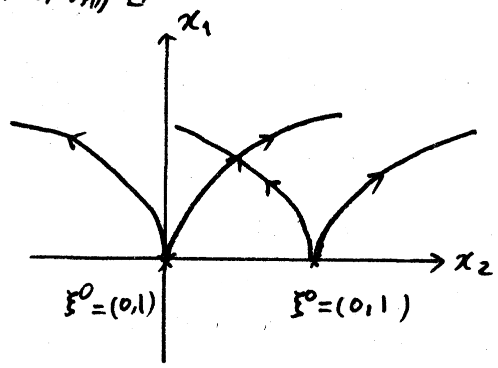
$$P_m(x,\xi) = \begin{cases} \xi_1^2 - x_2^2 \xi_2^2 & \text{—— (i)} \\ \xi_1^2 - x_1^2 \xi_2^2 & \text{—— (ii)} \\ \xi_1^2 - (x_1^2 + x_2^2)\xi_2^2 & \text{—— (iii)} \end{cases}$$

として、$P(x,\xi)$をCauchy問題がC^∞適切となるよう選ぶ(Nishitani [15]の条件をみたすように低階をきめる)。そのとき、$x_1=0$上の点よりでる解の波面集合を評価する$K^+_{(0,x_2^0,\xi^0)}$は、図のようになる(C^∞適切を仮定しているので、解の波面集合がK^+_zによって評価できる)。

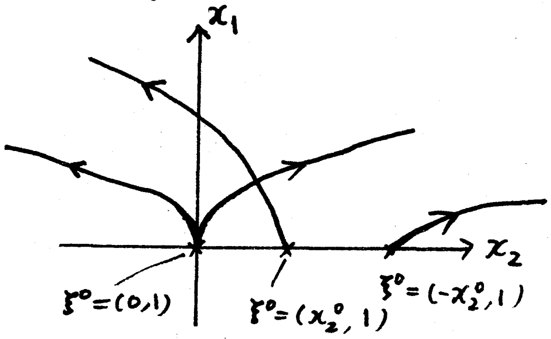
(i)の場合



(ii)の場合



(iii)の場合



(i)の場合には、定理1(定理5)を適用してもよい。(ii)の場合は、non-involutiveの場合で、Ivrii, Hanges, Melroseでも扱っている。

定理2の証明は、Bronshtein [3] の方法・評価とWakabayashi [19] における方法を組み合わせることによってなされる。次のLemmaを証明するために、定理2において係数が実解析的であると仮定した。

<u>Lemma 2</u>　任意のコンパクト集合 $M (\subset \Gamma_z)$ に対して、z の近傍 U が存在して

$$z' \in U \implies M \subset \Gamma_{z'}$$

が成立する(inner semi-continuity)。

このLemmaより、$K_z^{\pm}$ が近似的に構成されることがしめせ、定理2を証明するためには、次をしめせばよいこととなる。

☆ $z^0 \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$, $M\ (\subset \Gamma_{z^0})$: コンパクト, $U \supset\supset U'$: z^0 の近傍で, $\forall z \in U$ に対して $M \subset \Gamma_z$ をみたすとする.
supp $f \subset U'$ かつ $WF_*(f) \cap (\{z^0\} - M^\sigma) = \phi$ なる $f \in \mathcal{D}^{*\prime}$ に対して. $P(x,D)u = f$, supp $u \subset \{x_1 \geq c\}$ $z^0 \in WF_*(u)$ ならば. $z \in U' \cap (\{z^0\} - M^\sigma)$ が存在して、$z \in WF_*(u)$ かつ $z \neq z^0$ をみたす。

☆は、逐次近似によって解 u を構成して. Bronshtein の評価を用いて、解 u の表現における積分路を変更して証明される。

REFERENCES

[1] M. F. Atiyah, R. Bott and Gårding, Acta Math. 124 (1970), 109-189.
[2] M. D. Bronshtein, Sib. Mat. Zh. 20 (1979), 493-501.
[3] ________________, Trudy Moskov. Mat. Obšč. 41 (1980), 83-99.
[4] J. D. Duistermaat, Courant Institute Lecture Notes, New York 1974.
[5] H. Hanges, Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), 89-97.
[6] L. Hörmander, J. Analyse Math. 32 (1977), 118-196.
[7] ____________, Enseignement Math. 17 (1971), 99-163.
[8] V. Ja. Ivrii, Mat. Sb. 96 (1975), 390-413.
[9] ____________, Functional Anal. Appl. 10 (1976), 141-142.
[10] V. Ja. Ivrii and V. M. Petkov, Uspehi Mat. Nauk. 29 (1974), 3-70.
[11] H. Komatsu, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 20 (1973), 25-105.
[12] R. Lascar, Springer Lecture Notes in Math. 856 (1981).
[13] R. B. Melrose, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 939-940.
[14] Y. Morimoto, Comm. in P. D. E. 4 (1979), 609-643.
[15] T. Nishitani, A necessary and sufficient condition for the hyperbolicity of second order equations with two independent variables, to appear.
[16] J. C. Nosmas, Comm. in P. D. E. 5 (1980), 1-22.
[17] J. M. Trepreau, Comm. in P. D. E. 4 (1979), 339-387.

[18] S. Wakabayashi, Japanese J. Math. 6 (1980), 179-228.

[19] ______________, Singularities of solutions of the Cauchy problems for operators with nearly constant coefficient hyperbolic principal part, to appear in Comm. in P. D. E.

[20] J. Chazarain, Ann. Inst. Fourier Grenoble 24 (1974), 173-202.